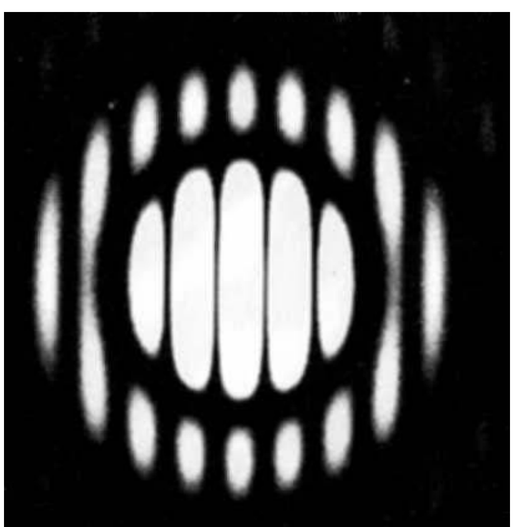
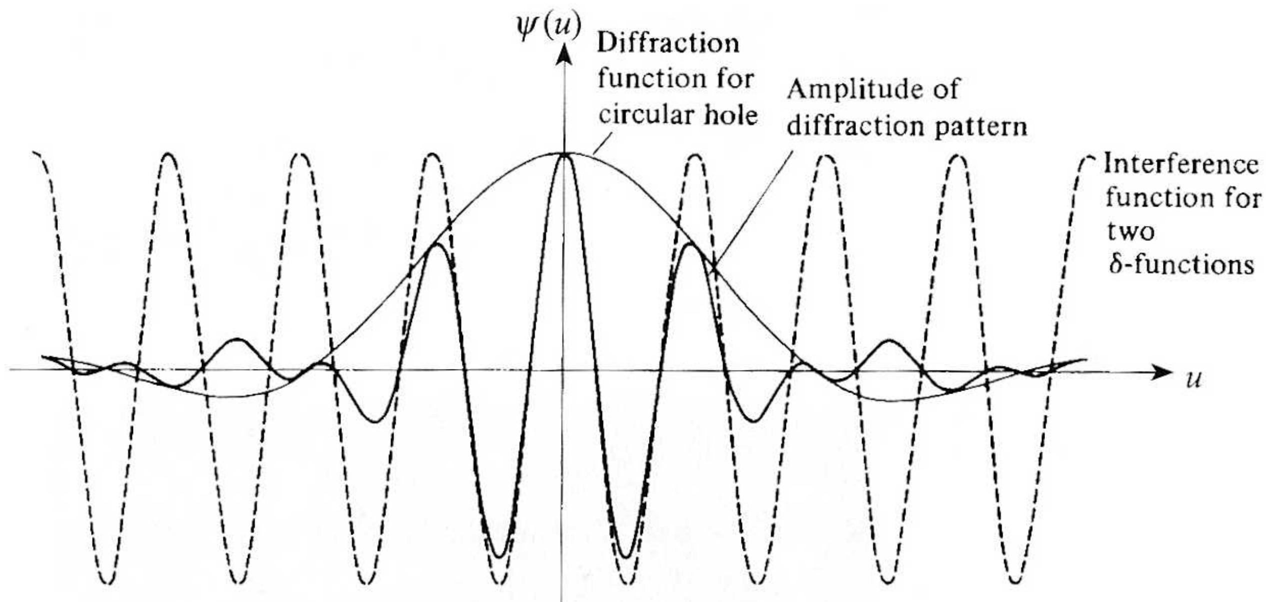
התאבכות

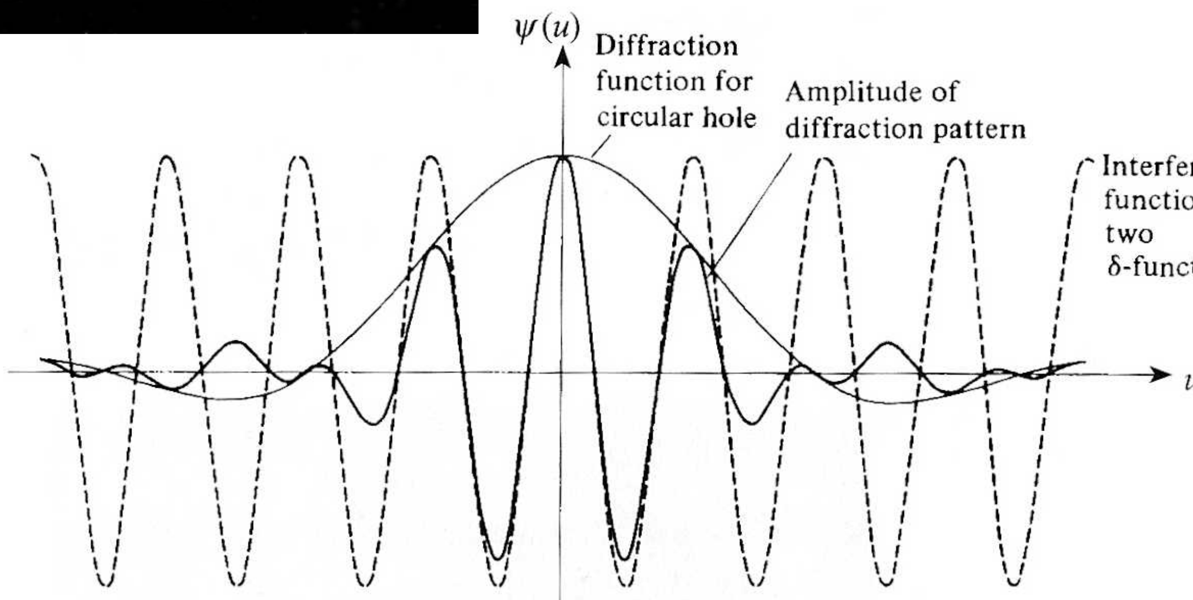
- נעבור מקרן אחת לשתי קרנים או יותר, ונבחן את חיבורן. נניח מקור אור משותף לשתי הקרנים.
- אם המפתחים זהים, ניתן להשתמש בעקרון הקונבולוציה. שני מפתחים יכולים להחשב כקונבולוציה של מפתח אחד עם שתי פונקציות δ.
- תבנית ההתאבכות היא מכפלת תבנית העקיפה של מפתח אחד עם תבנית עקיפה של פונקציות ה-δ.
- כך מחלקים את בעית ההתאבכות לשני חלקים – עקיפה של מפתח אחד ושל פונקציות δ.
- מבדילים בין תבנית עקיפה (למפתח בודד) לתבנית התאבכות (לפונקציות δ).





התאבכות משני חורים

- נניח שהמרחק בין החורים הוא a. התמרה של שתי פונקציות δ היא
$$\psi(u,v) = 2\cos\frac{ua}{2}$$
- האפסים של תבנית ההתאבכות קורים עבור
$$\frac{ua}{2} = \left(m+\tfrac{1}{2}\right)\pi \rightarrow a\sin\theta = \left(m+\tfrac{1}{2}\right)\lambda$$
- זהו הביטוי לפסי ההתאבכות של ניסוי יאנג (Young).
- קיבלנו את הביטוי המלא ולא רק את צפיפות הפסים.
- הוכחנו את נכונות שיטת הקונבולוציה בדוגמה פשוטה.



התאבכות משורת חורים

- מערכת חורים זהים ניתנת לכתיבה כקונבולוציה של פונקציות δ עם מפתח אחד.
- התמרת N פונקציות δ במרחק קבוע d היא

$$\psi(u,v)=\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-iund}$$

- כאשר מספר החורים שואף לאינסוף, מקבלים

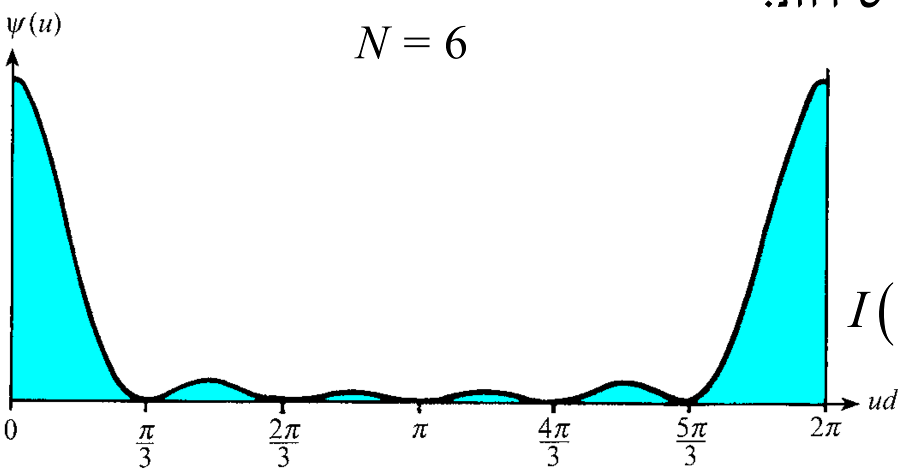
$$\psi(u,v)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(u-\frac{2\pi m}{d}\right)$$

- האינדקס m הוא סדר העקיפה.
- כאשר N סופי, ניתן לחשב את תבנית ההתאבכות ישירות:

$$\psi(u,v)=\sum_{n=0}^{N-1}\mathrm{e}^{-iund}=\frac{1-\mathrm{e}^{-iuNd}}{1-\mathrm{e}^{-iud}}$$

- ומכאן את העוצמה

$$I(u,v)=\left|\psi(u,v)\right|^2=\frac{\sin^2(uNd/2)}{\sin^2(ud/2)}$$



משורת חורים לסריג עקיפה

$$I(u,v) = |\psi(u,v)|^2 = \frac{\sin^2(uNd/2)}{\sin^2(ud/2)}$$

- פונקציה זו היא אפס כאשר המונה אפס.
- כאשר המכנה גם הוא אפס, ערך הפונקציה N^2. זהו שיא עיקרי.
- כשמספר המפתחים גדל, גדל מספר האפסים (והשיאים ביניהם).
- כשמספר המפתחים גדל, השיאים העיקריים גדלים יותר ביחס למשניים.
- כאשר המספר גדול מאוד, השיאים העיקריים הולכים ומתקרבים ל- $\delta(u - 2m\pi/d)$.
- התנאי ליצירת שיאים עיקריים הוא

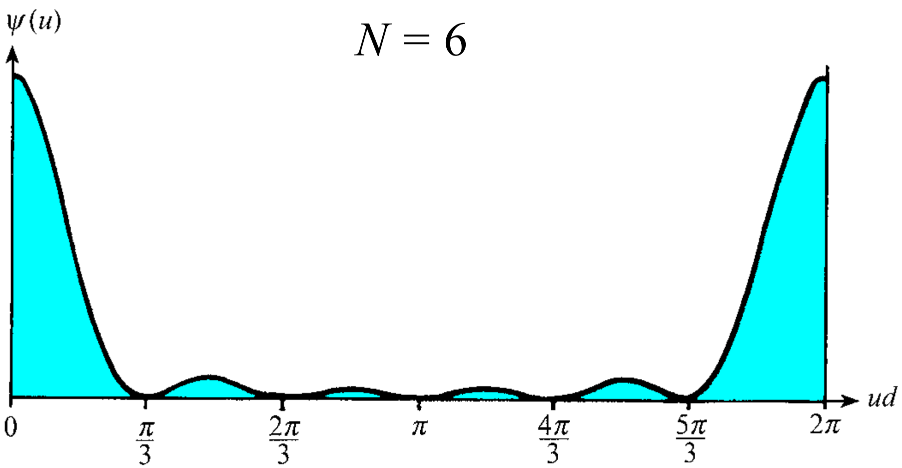
$$ud/2 = m\pi$$

- מכיון שראינו כי

$$u = 2\pi \sin\theta / \lambda$$

- מתקבל התנאי לסריג עקיפה:

$$d \sin\theta = m\lambda$$

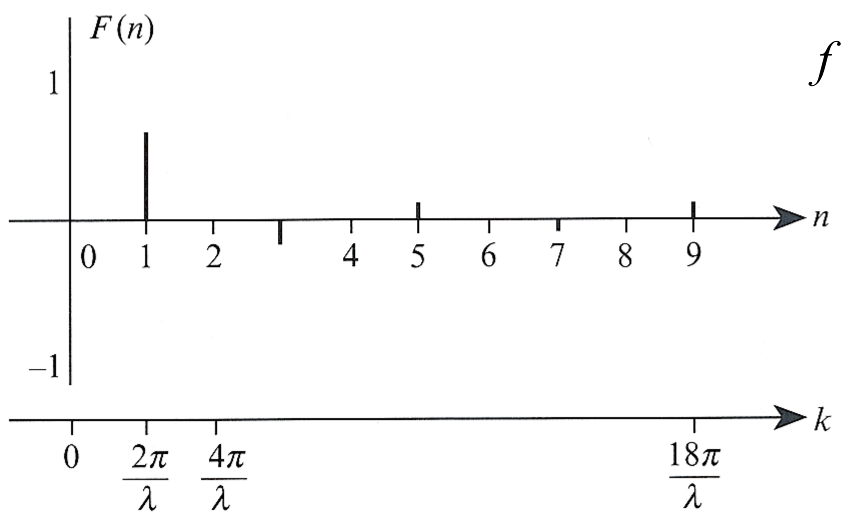


סריגי עקיפה

- סריג עקיפה הוא מערך חד-מימדי ומחזורי של מפתחים דומים, ומשמש להבנת הולוגרפיה ודימות.
- בהעברה, המפתחים הם סדקים צרים. בהחזרה, מראות צרות.
- ההעברה של המפתח היא $b(x)$ והמרחק בין המפתחים הוא d.
- ההעברה היא $$f(x)=b(x)*\sum_{n=-N/2}^{N/2}\delta(x-nd)$$
- כאשר מספר הסדקים שואף לאינסוף מקבלים $$\psi(u)=B(u)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(u-\frac{2\pi m}{d}\right)$$
- כזכור, u תלוי בזויות הכניסה והיציאה לסריג ועל כן מוגבל בערכו, $$u=\frac{2\pi}{\lambda}\left(\sin\theta-\sin\theta_0\right)\le\frac{4\pi}{\lambda}$$
- נציב בהעברה: $$\psi(u)=B(u)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left\{\frac{2\pi}{d\lambda}\left[d\left(\sin\theta-\sin\theta_0\right)-\lambda m\right]\right\}$$
- ומכאן $$d\left(\sin\theta-\sin\theta_0\right)=m\lambda$$
- עבור זוית נתונה θ_0 רק מספר סדרים אפשרי: $$\left(-1-\sin\theta_0\right)d/\lambda<m<\left(1-\sin\theta_0\right)d/\lambda$$

העברה בסריגי עקיפה

- המשרעות של סדרי עקיפה שונים נתונים על ידי ההתמרה של מפתח בודד, $B(u)$.
- לדוגמה, סריג רונקי (Ronchi) הוא סריג גל מרובע, שבו $b\,(x) = \mathrm{rect}\,(2\,x\,/\,d)$.
- בסריג כזה חסרים סדרי העקיפה הזוגיים, והסדרים האי-זוגיים יורדים בעוצמה עם עליית מספר הסדר.
- סדר האפס (שאינו מצויר) חזק מאוד, כי $b\,(x) > 0$.
- כיון שכל סריג למעשה סופי, יש לסכם מספר סופי של אברים.
- ניתן לכתוב זאת כפונקצית חלון שמעבירה N פונקציות δ.
- אורך פונקצית החלון הוא $N\,d$, והעברת הסריג היא



$$f(x) = b(x) * \sum_{n=-N/2}^{N/2} \delta(x - nd)$$

$$= b(x) * \left[\mathrm{rect}\frac{x}{Nd} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nd) \right]$$

- אין להחליף את סדר הכפל והקונבולוציה!

סידרי עקיפה בסריג

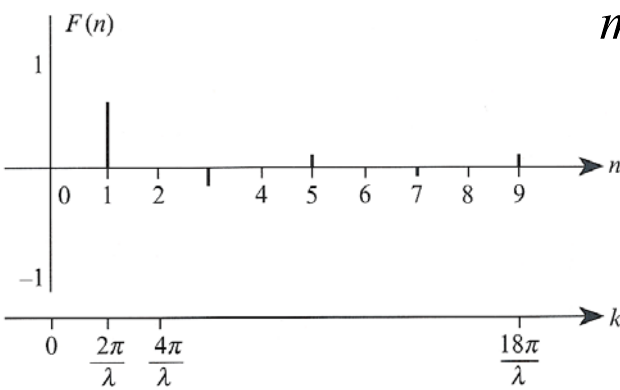
- קיבלנו סריג שהעברתו

$$f(x) = b(x) * \left[\mathrm{rect}\frac{x}{Nd} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nd) \right]$$

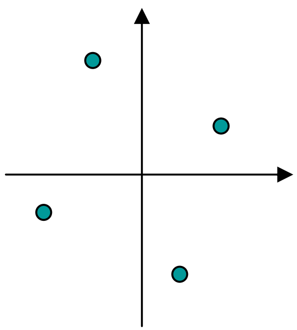
- נחשב את תבנית העקיפה שלו:

$$\psi(u) = B(u)\left[\mathrm{sinc}\frac{uNd}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(u - \frac{2\pi m}{d} \right) \right]$$

- יש כאן סדרי עקיפה מוגדרים היטב $m\lambda = d\left(\sin\theta - \sin\theta_0\right)$
- לכל אחד מסדרי העקיפה יש פרופיל $\mathrm{sinc}\left(uNd/2\right)$
- רוחב הסדרים הוא $\Delta u = 2\pi Nd$
- רוחב זה הוא $1/N$ המרחק בין הסדרים.



התאבכות ממערך חרירים



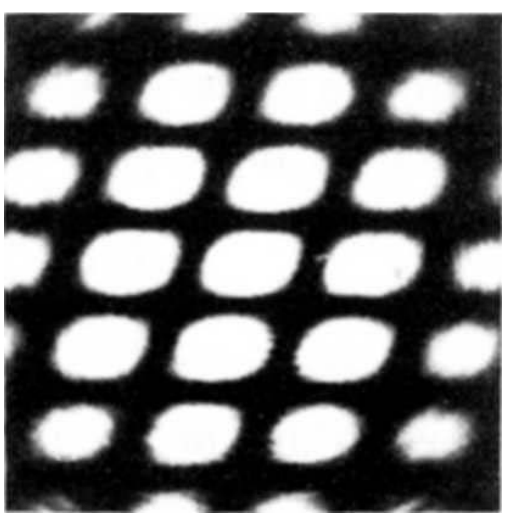
- נתבונן כעת בסריג דו-מימדי, מחזורי בכוון x ובכוון y.
- המסכה הבסיסית של הסריג היא חרירים בנקודות $\pm(x_1, y_1)$, $\pm(x_2, y_2)$.
- הגל יהיה

$$\psi(u,v)=\sum e^{-i(ux+vy)}=2\left[\cos(ux_1+vy_1)+\cos(ux_2+vy_2)\right]$$

$$=4\cos\left(u\frac{x_1+x_2}{2}+v\frac{y_1+y_2}{2}\right)\cos\left(u\frac{x_1-x_2}{2}+v\frac{y_1-y_2}{2}\right)$$

- בדומה להתאבכות משני חורים, יהיו כאן שיאים בערכי (u, v) לפי

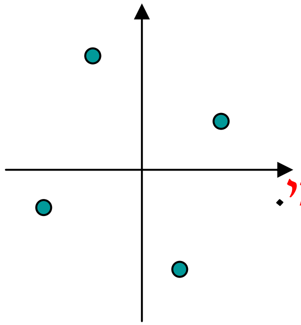
$$\left(u\frac{x_1+x_2}{2}+v\frac{y_1+y_2}{2}\right)=m\pi;\quad\left(u\frac{x_1-x_2}{2}+v\frac{y_1-y_2}{2}\right)=n\pi$$

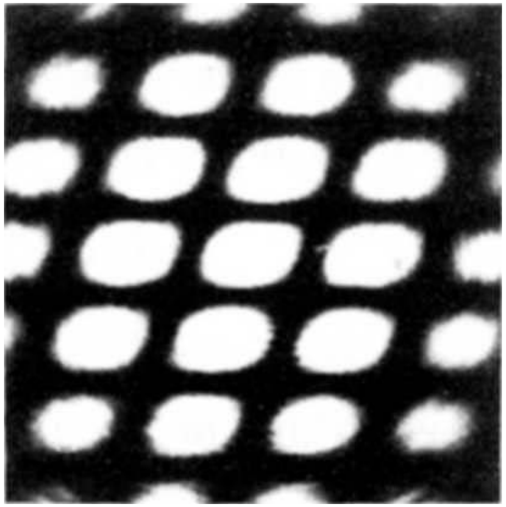


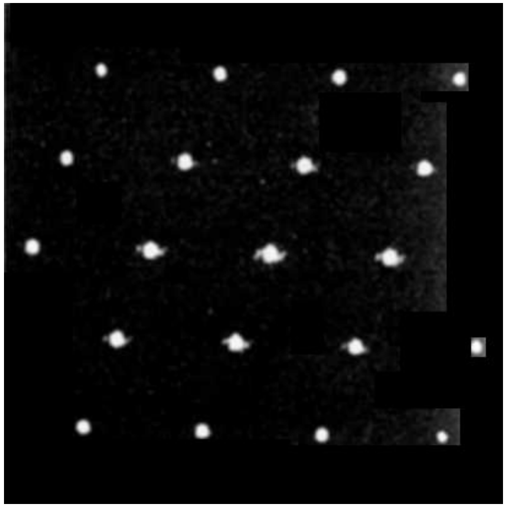
- תבנית ההתאבכות היא מכפלת שתי סדרות פסי התאבכות קוויים.
- כל סדרה מאונכת להפרדת החורים שלה.
- אלו פסי התאבכות מוצלבים.

סריג הפכי

- מגדילים את מספר החורים בסריג, ומתבססים על אותם ארבעה חורים.
- ככל שמספר היחידות החוזרות גדל, כך מתחדדים פסי ההתאבכות יותר.
- הנקודות בסריג מתקרבות והולכות לפונקציות δ.
- בגלל הקשר ההפכי בין מימדי הסריג ובין המרחק בין החורים, הסריג נקרא סריג הפכי.







סריג הפכי דו מימדי

- ננסה לחשב סריג הפכי דו-מימדי (ההעברה לתלת-מימד מיידית).
- יהיו מיקומי החרירים מוגדרים על ידי שני וקטורי סריג **a** ו-**b**:

$$f(x) = \sum_{h,k=-\infty}^{\infty} \delta(\mathbf{r} - h\mathbf{a} - k\mathbf{b}); \qquad h,k \text{ integers}$$

- ההתמרה של מערך החרירים הוא

$$\psi(u,v) = \sum_{h,k=-\infty}^{\infty} \exp\left[-i\mathbf{u}\cdot(h\mathbf{a} + k\mathbf{b})\right]$$

- נגדיר שני וקטורים חדשים, **a*** ו-**b*** במישור u

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}^* = 1; \ \ \mathbf{b} \bullet \mathbf{b}^* = 1$$

- הוקטורים החדשים ניצבים לקודמים לפי

$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}^* = \mathbf{a}^* \bullet \mathbf{b} = 0$, או $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}^*$ ו- $\mathbf{a}^* \perp \mathbf{b}$

- נרשום את u באמצעות הוקטורים החדשים ומקדמים כלשהם

$$u = 2\pi\,(h^*\mathbf{a}^* + k^*\mathbf{b})$$

וקטורי הסריג

$$\psi(u,v)=\sum_{h,k=-\infty}^{\infty}\exp\left[-i\mathbf{u}\cdot\left(h\mathbf{a}+k\mathbf{b}\right)\right]$$

- נציב את $u = 2\pi\,(h^*\mathbf{a}^* + k^*\mathbf{b})$ בגל לעיל ונקבל

$$\psi(u,v)=\sum_{h,k=-\infty}^{\infty}\exp\left[-2\pi i\left(hh^*\mathbf{a}^*\cdot\mathbf{a}+kk^*\mathbf{b}^*\cdot\mathbf{b}\right)\right]$$
$$=\sum\exp\left[-2\pi i\left(hh^*+kk^*\right)\right]$$

- הסכום של רוב המעריכים המרוכבים מתאפס, אבל כאשר h^* ו- k^* הם שלמים, כל אבר בסכום הוא יחידה והסכום אינסופי.
- לכן הגל הוא למעשה מערך של פונקציות δ על סריג המוגדר באמצעות $\mathbf{a}^*$ ו-$\mathbf{b}^*$: הסריג ההפכי.

וקטורי הסריג ההפכי

- מכיון שידועים וקטורי סריג **a** ו-**b** אפשר לחשב באמצעותם את וקטורי הסריג ההפכי **a*** ו-**b***.
- אם הזוית בין הוקטורים במרחב הרגיל היא φ, אזי הזוית בין **-a*** ו-**b*** או **a*** ו-**-b*** גם היא φ.
- הגדרנו את שני הוקטורים ההפכיים **a*** ו-**b*** במישור u לפי

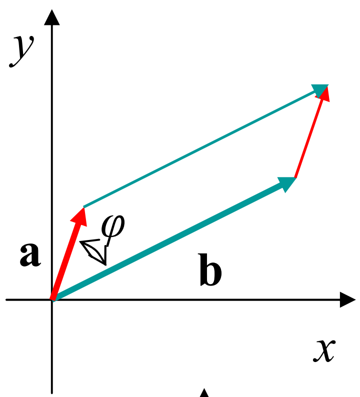
$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}^* = 1; \quad \mathbf{b} \bullet \mathbf{b}^* = 1$$

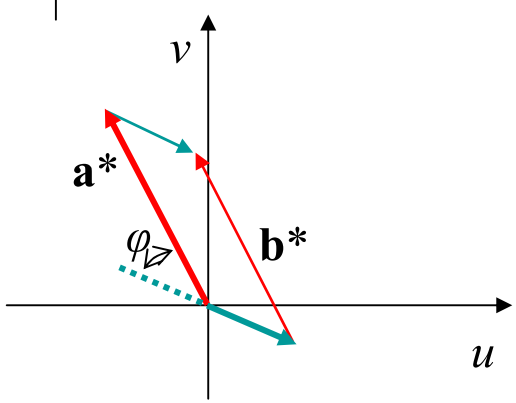
- הוקטורים ההפכיים ניצבים לישירים לפי

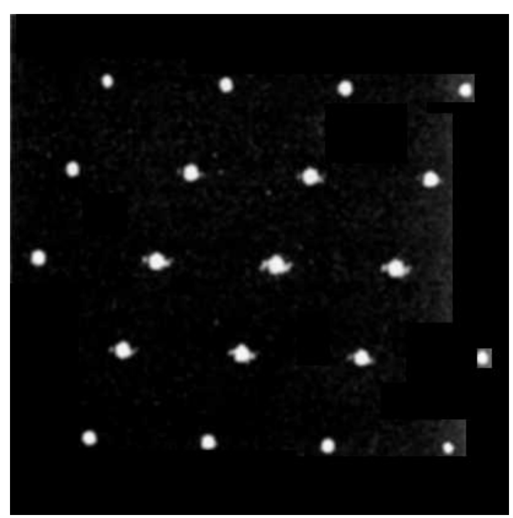
$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}^* = \mathbf{a}^* \bullet \mathbf{b} = 0, \text{ או } \mathbf{a} \perp \mathbf{b}^* \text{ ו- } \mathbf{a}^* \perp \mathbf{b}$$

- ואורכיהם הפכיים לאורכי הוקטורים הישירים

$$|\mathbf{a}^*| = (a \sin \varphi)^{-1}, \quad |\mathbf{b}^*| = (b \sin \varphi)^{-1}$$

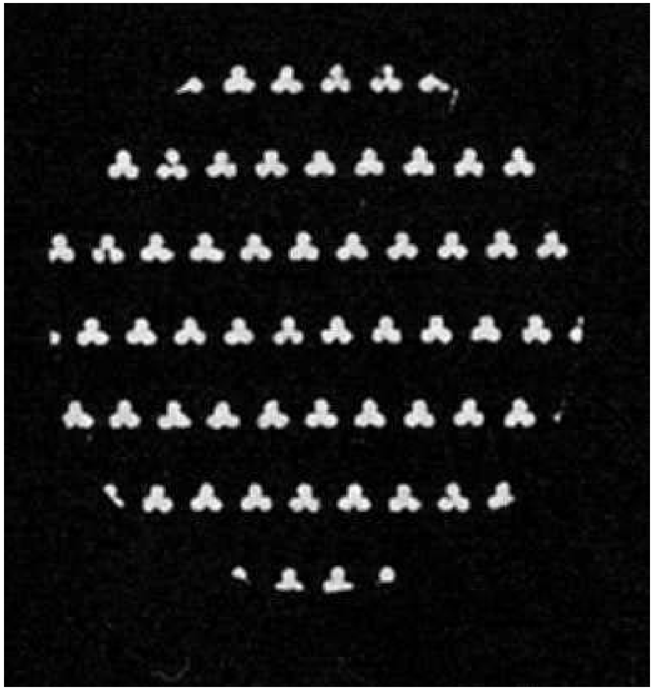


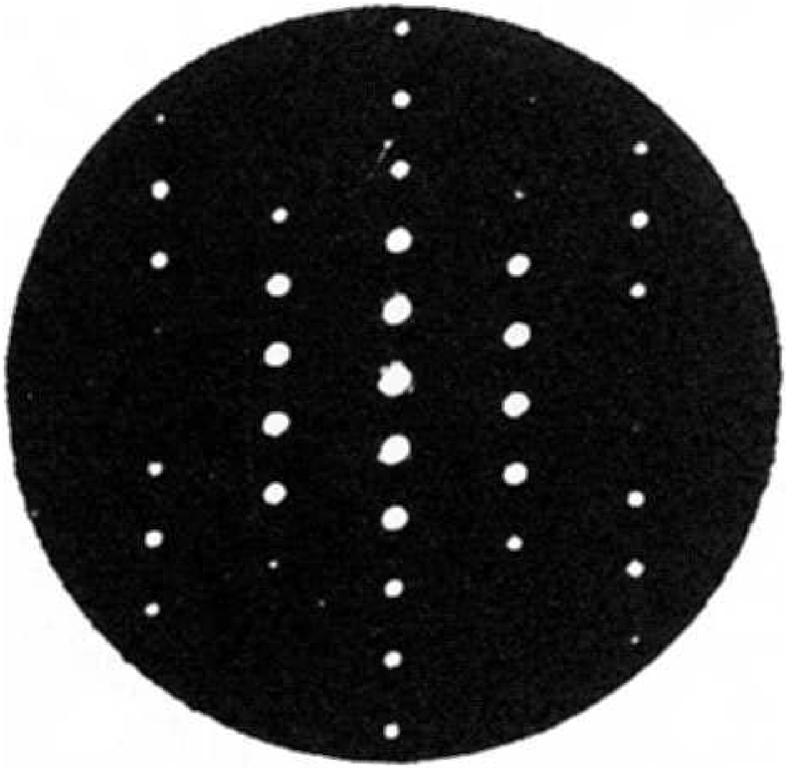




התאבכות מסריג מפתחים

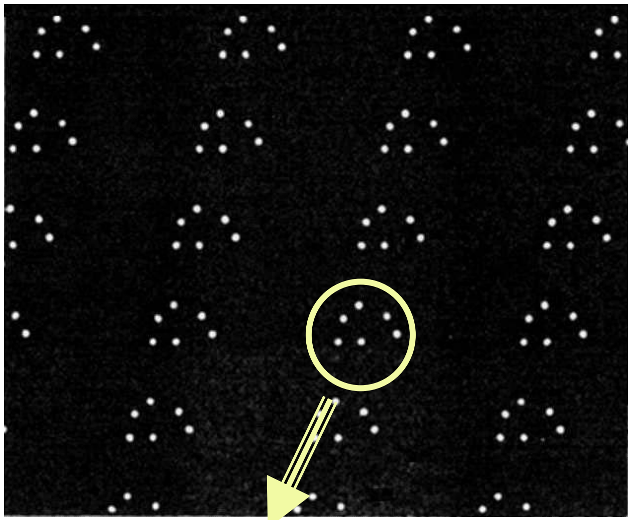
- נניח סריג העשוי מפתחים מפתחים, שכולם דומים.
- ניתן ליצגו כקונבולוציה של מפתח אחד עם סריג בהעתקות **a** ו-**b**.
- תבנית העקיפה היא אם כן המכפלה של תבנית העקיפה של הסריג ושל המפתח הבודד.
- במלים אחרות, הסריג ההפכי מוכפל בתבנית העקיפה של יחידה אחת.

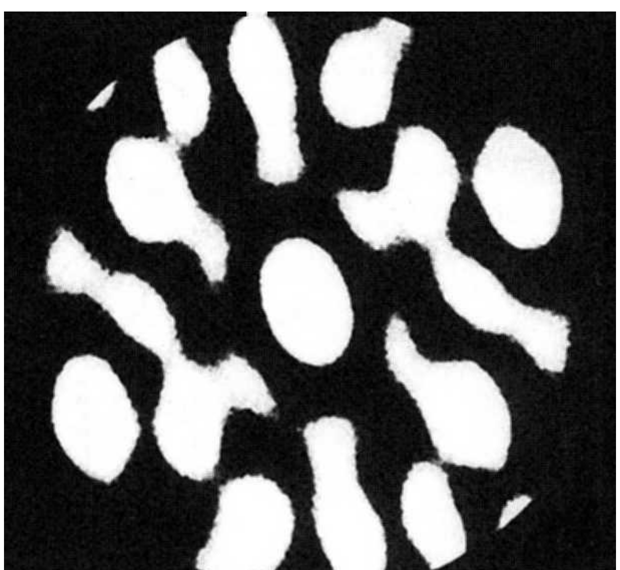




התאבכות מסריג מפתחים

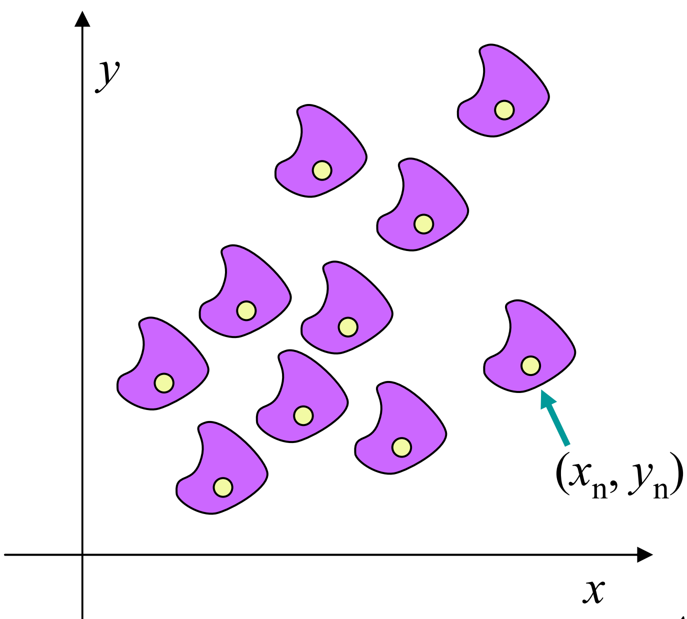
- בסריג מסובך ניתן לחשב או למדוד את תמונת העקיפה של הסריג כולו ושל תא יחידה שלו.
- מערך של תאי יחידה יוצר עקיפה הנראית רק בנקודות הסריג ההפכי. זהו תהליך הדגימה.
- המספרים h^* ו- k^* הם סדרי העקיפה בשני הצירים.





עקיפה מסריג מפתחים אקראי

- נניח כעת שהעצם המפזר עשוי מאוסף של מפתחים זהים המסודרים בצורה אקראית.
- זוהי קונבולוציה של המפתח הבודד ומערך אקראי של פונקציות δ. מהי העקיפה ממערך אקראי כזה?



$$\psi(u,v) = \sum_{n=1}^{N} \delta(x-x_n)\delta(y-y_n)\exp\left[-i(ux+vy)\right]$$
$$= \sum_{n=1}^{N} \exp\left[-i(ux_n+vy_n)\right]$$

- ניתן לחשב רק את העוצמה של הסכום:

$$\left|\psi(u,v)\right|^2 = \left|\sum_{n=1}^{N} \exp\left[-i(ux_n+vy_n)\right]\right|^2$$
$$= \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \exp\left\{-i\left[u(x_m-x_n)+v(y_m-y_n)\right]\right\}$$

- תרומת כל האברים היא אקראית ומתמצעת לאפס עבור N גדול, פרט לשני מקרים פרטיים.

סכום מפתחים אקראי

- העוצמה היא

$$I(u,v)=\left|\psi(u,v)\right|^2=\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}\exp\left\{-i\left[u\left(x_m-x_n\right)+v\left(y_m-y_n\right)\right]\right\}$$

- כאשר $n = m$ כל החזקות מתאפסות ומקבלים N אברים כאלה.
- כאשר $u = v = 0$ כל החזקות מתאפסות ומקבלים N^2 אברים כאלה.

$$I(u,v)=N+N^2\delta_K(u,v)$$

- δ_{K} היא הדלתא של קרונקר. ערכה יחידה בראשית ואפס בשאר התחום.
- קיבלנו שהעוצמה בראשית חזקה, ונוספת לה קרינת רקע קבועה.
- כיון שמעשית הנקודות אינן נמצאות בכל המרחב, הרקע לא יהיה אחיד.
- אם הנקודות נמצאות ברבוע בעל צלע D, יתחברו בסכום למעלה כל האברים בתחום בגודל $\pi/2D$.
- גם עוצמת הנקודה בראשית תהיה סופית בהתאמה.
- אם המפתחים אקראיים במיקומם אך לא חופפים, יש תבנית חלשה ברקע.
- כאשר עושים קונבולוציה עם המפתח, מקבלים מכפלה של תמונות העקיפה.

מסכת מפתחים אקראית

- בדוגמה המסכה מכילה מספר רב של מפתחים דומים.
- תבנית העקיפה, או התמרת מפתח אחד משקפת את הסימטריה שלו.
- ההתמרה הכוללת מונחתת במרכז, כדי להראות את פילוג העוצמה שם.